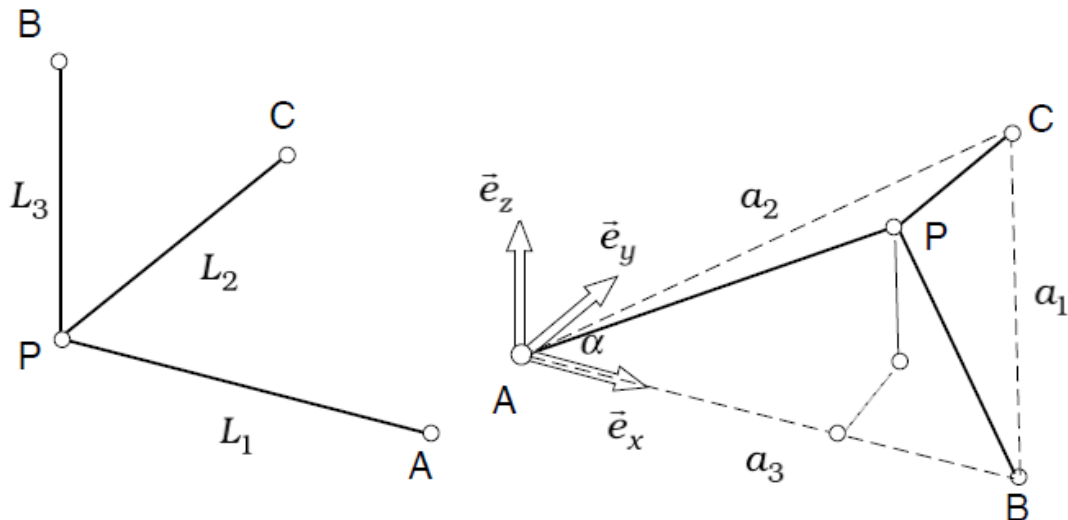


Egy derékszögű tetraéder - feladról

Az interneten találtuk az [1] feladatgyűjtemény - részt. Ebben a 8 ~ 9. oldalakon megoldá - nak egy feladatot, melynek egy módosított változata az itteni. Most ezt fogjuk részletesen megbeszélni. Ehhez tekintsük az 1. ábrát is!



1. ábra – [1]

Az 1. ábrán az eredeti feladat szemléltető, illetve a megoldást segítő ábrái láthatóak.

Az eredeti feladat:

adott: L_1, L_2, L_3 , és ezek a szakaszok páronként merőlegesek egymásra;

keresett: az 1. ábra jobb oldali részlete szerinti koordináta - rendszerbeli (x_P, y_P, z_P) .

A módosított feladat:

adott: L_1, L_2, L_3 , és ezek a szakaszok páronként merőlegesek egymásra;

keresett: az $ABCP \rightarrow ABCD$ derékszögű tetraéder fontosabb ismeretlen adatai, főképpen a jellemző hosszak és szögek.

A megoldáshoz tekintsük a 2. ábrát is! Itt az 1. ábra bal oldalán is látható *háromláb*at mutat - juk meg még egyszer, úgy, hogy

1.) két láb az A és B végpontokkal a vízszintes xy alapsíkon nyugszik, miközben a két rúd síkja függőleges, azaz merőleges az alapsíkra; majd

2.) az A és B pontokat összekötő egyenes – mint forgástengely – körül a háromlábát addig forgatjuk el, amíg a harmadik láb szabad C vége az alapsíkra fel nem támaszkodik.

Az ábráról közvetlenül leolvasható, hogy

~ a D_1C_1 szakasz benne van / marad az AB egyenesre merőleges és a D - n átmenő (itt függőleges) síkban, hiszen a DC szakasz mindvégig az $r = OD$ sugarú kör érintőjének része;

~ az OD_1C_1 szög derékszög, hiszen az r sugár merőleges a D_1C_1 körérintő - szakaszra;

~ az elforgatás ϑ szöge, az ABD_1 sík φ , valamint a C_1D_1 szakasz ϕ hajlásszögei között fennáll a

I. Az (a, b, c) és az (α, β, γ) mennyiségek meghatározása

Most Pitagorász tételével:

$$\underline{a = \sqrt{L_2^2 + L_3^2}}, \quad \underline{b = \sqrt{L_3^2 + L_1^2}}, \quad \underline{c = \sqrt{L_1^2 + L_2^2}}. \quad (2)$$

Majd koszinusz - tétellel:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha \rightarrow \cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c}; \quad (3/1)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \beta \rightarrow \cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c}; \quad (3/2)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma \rightarrow \cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \cdot a \cdot b}. \quad (3/3)$$

Ezután (2) és (3) - mal:

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c} = \frac{L_3^2 + L_1^2 + L_1^2 + L_2^2 - L_2^2 - L_3^2}{2 \cdot b \cdot c} = \frac{2 \cdot L_1^2}{2 \cdot b \cdot c} = \frac{L_1^2}{b \cdot c}, \text{ vagyis}$$

$$\cos \alpha = \frac{L_1^2}{b \cdot c}; \quad (4/1)$$

tovább (2) és (4/1) - gyel:

$$\cos \alpha = \frac{L_1^2}{\sqrt{L_3^2 + L_1^2} \cdot \sqrt{L_1^2 + L_2^2}}, \quad (4/2)$$

innen:

$$\underline{\underline{\alpha = \arccos \left(\frac{L_1^2}{\sqrt{L_3^2 + L_1^2} \cdot \sqrt{L_1^2 + L_2^2}} \right)}}. \quad (4/3)$$

Hasonlóképpen eljárva:

$$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c} = \frac{L_2^2 + L_3^2 + L_1^2 + L_2^2 - L_3^2 - L_1^2}{2 \cdot a \cdot c} = \frac{2 \cdot L_2^2}{2 \cdot a \cdot c} = \frac{L_2^2}{a \cdot c}, \text{ vagyis}$$

$$\cos \beta = \frac{L_2^2}{a \cdot c}; \quad (5/1)$$

tovább (2) és (5/1) - gyel:

$$\cos \beta = \frac{L_2^2}{\sqrt{L_2^2 + L_3^2} \cdot \sqrt{L_1^2 + L_2^2}}, \quad (5/2)$$

innen:

$$\beta = \arccos\left(\frac{L_2^2}{\sqrt{L_2^2+L_3^2} \cdot \sqrt{L_1^2+L_2^2}}\right). \quad (5/3)$$

Ugyanígy:

$$\cos \gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2 \cdot a \cdot b} = \frac{L_2^2+L_3^2+L_3^2+L_1^2-L_1^2-L_2^2}{2 \cdot a \cdot b} = \frac{2 \cdot L_3^2}{2 \cdot a \cdot b} = \frac{L_3^2}{a \cdot b}, \text{ vagyis}$$

$$\cos \gamma = \frac{L_3^2}{a \cdot b}; \quad (6/1)$$

tovább (2) és (6/1) - gyel:

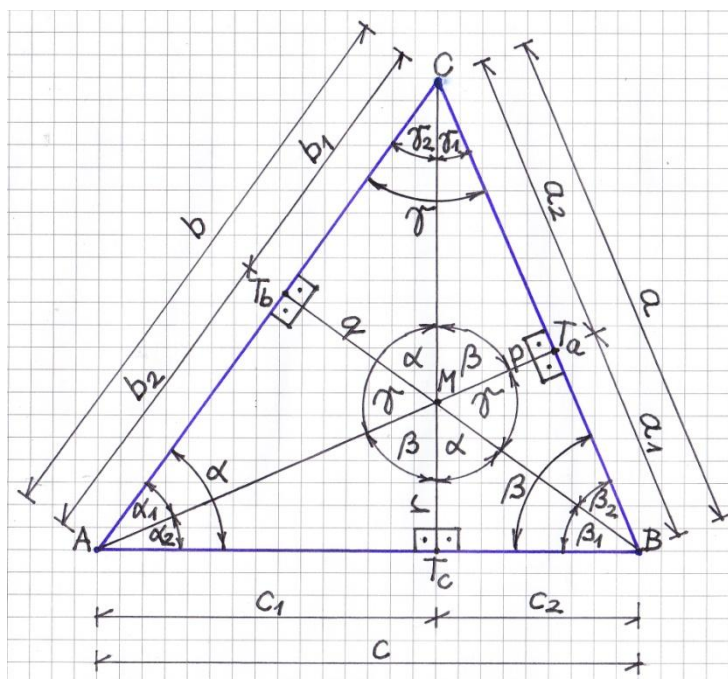
$$\cos \gamma = \frac{L_3^2}{\sqrt{L_2^2+L_3^2} \cdot \sqrt{L_3^2+L_1^2}}, \quad (6/2)$$

innen:

$$\gamma = \arccos\left(\frac{L_3^2}{\sqrt{L_2^2+L_3^2} \cdot \sqrt{L_3^2+L_1^2}}\right). \quad (6/3)$$

II. Az $\mathbf{ABC}$ háromszög síkjában értelmezett további szakaszok és szögek meghatározása

Ehhez tekintsük a 4. ábrát is!



4. ábra

A 4. ábráról rögtön leolvashatók az alábbi szögösszefüggések:

$$\alpha_1 = \beta_2 = 90^\circ - \gamma ; \quad (7 / 1)$$

$$\alpha_2 = \gamma_1 = 90^\circ - \beta ; \quad (7 / 2)$$

$$\beta_1 = \gamma_2 = 90^\circ - \alpha ; \quad (7 / 3)$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ . \quad (7 / 4)$$

Az **ABC** alapháromszög oldalainak részei a 4. ábra szerint, a (2), (4 / 1), (5 / 1) és (6 / 1) képletekkel is:

$$a_1 = c \cdot \cos \beta = \frac{L_2^2}{a} = \frac{L_2^2}{\sqrt{L_2^2 + L_3^2}} ; \quad (8 / 1)$$

$$b_1 = a \cdot \cos \gamma = \frac{L_3^2}{b} = \frac{L_3^2}{\sqrt{L_3^2 + L_1^2}} ; \quad (8 / 2)$$

$$c_1 = b \cdot \cos \alpha = \frac{L_1^2}{c} = \frac{L_1^2}{\sqrt{L_1^2 + L_2^2}} ; \quad (8 / 3)$$

$$a_2 = b \cdot \cos \gamma = \frac{L_3^2}{a} = \frac{L_3^2}{\sqrt{L_2^2 + L_3^2}} ; \quad (8 / 4)$$

$$b_2 = c \cdot \cos \alpha = \frac{L_1^2}{b} = \frac{L_1^2}{\sqrt{L_3^2 + L_1^2}} ; \quad (8 / 5)$$

$$c_2 = a \cdot \cos \beta = \frac{L_2^2}{c} = \frac{L_2^2}{\sqrt{L_1^2 + L_2^2}} . \quad (8 / 6)$$

Ellenőrzés:

$$a_1 + a_2 = \frac{L_2^2 + L_3^2}{\sqrt{L_2^2 + L_3^2}} = \sqrt{L_2^2 + L_3^2} = a ; \quad (e / 1)$$

$$b_1 + b_2 = \frac{L_3^2 + L_1^2}{\sqrt{L_3^2 + L_1^2}} = \sqrt{L_3^2 + L_1^2} = b ; \quad (e / 2)$$

$$c_1 + c_2 = \frac{L_1^2 + L_2^2}{\sqrt{L_1^2 + L_2^2}} = \sqrt{L_1^2 + L_2^2} = c . \quad (e / 3)$$

Az (e) egyenletek megerősítik az eddigiek helyességét.

Most meghatározzuk a **(p , q , r)** szakasz - hosszakat. A 4. ábra és képleteink szerint:

$$p = a_1 \cdot \operatorname{tg} \beta_2 = \frac{L_2^2}{a} \cdot \operatorname{tg}(90^\circ - \gamma) = \frac{L_2^2}{a} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \gamma} = \frac{L_2^2}{a} \cdot \frac{\cos \gamma}{\sin \gamma} = \frac{L_2^2}{a} \cdot \frac{\cos \gamma}{\sqrt{1 - \cos^2 \gamma}} ; \text{ folytatva:}$$

$$\begin{aligned}
p &= \frac{L_2^2}{a} \cdot \frac{\frac{L_3^2}{a \cdot b}}{\sqrt{1 - \left(\frac{L_3^2}{a \cdot b}\right)^2}} = \frac{L_2^2}{a} \cdot \frac{L_3^2}{\sqrt{(a \cdot b)^2 - L_3^4}} = \frac{(L_2 \cdot L_3)^2}{\sqrt{L_2^2 + L_3^2} \cdot \sqrt{(L_2^2 + L_3^2) \cdot (L_3^2 + L_1^2) - L_3^4}} = \\
&= \frac{(L_2 \cdot L_3)^2}{\sqrt{L_2^2 + L_3^2} \cdot \sqrt{(L_2 \cdot L_3)^2 + (L_2 \cdot L_1)^2 + (L_3 \cdot L_3)^2 + (L_3 \cdot L_1)^2 - L_3^4}} = \frac{(L_2 \cdot L_3)^2}{\sqrt{L_2^2 + L_3^2} \cdot \sqrt{(L_1 \cdot L_2)^2 + (L_1 \cdot L_3)^2 + (L_2 \cdot L_3)^2}}, \text{ tehát:}
\end{aligned}$$

$$p = \frac{(L_2 \cdot L_3)^2}{\sqrt{L_2^2 + L_3^2} \cdot \sqrt{(L_1 \cdot L_2)^2 + (L_1 \cdot L_3)^2 + (L_2 \cdot L_3)^2}}. \quad (9 / 1)$$

Hasonlóan:

$$q = b_1 \cdot \operatorname{tg} \gamma_2 = \frac{L_3^2}{b} \cdot \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{L_3^2}{b} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{L_3^2}{b} \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{L_3^2}{b} \cdot \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}; \text{ folytatva:}$$

$$\begin{aligned}
q &= \frac{L_3^2}{b} \cdot \frac{\frac{L_1^2}{b \cdot c}}{\sqrt{1 - \left(\frac{L_1^2}{b \cdot c}\right)^2}} = \frac{L_3^2}{b} \cdot \frac{L_1^2}{\sqrt{(b \cdot c)^2 - L_1^4}} = \frac{(L_1 \cdot L_3)^2}{\sqrt{L_1^2 + L_3^2} \cdot \sqrt{(L_1^2 + L_3^2) \cdot (L_1^2 + L_2^2) - L_1^4}} = \\
&= \frac{(L_1 \cdot L_3)^2}{\sqrt{L_1^2 + L_3^2} \cdot \sqrt{L_1^4 + (L_1 \cdot L_2)^2 + (L_1 \cdot L_3)^2 + (L_2 \cdot L_3)^2 - L_1^4}} = \frac{(L_1 \cdot L_3)^2}{\sqrt{L_1^2 + L_3^2} \cdot \sqrt{(L_1 \cdot L_2)^2 + (L_1 \cdot L_3)^2 + (L_2 \cdot L_3)^2}}, \text{ tehát:}
\end{aligned}$$

$$q = \frac{(L_1 \cdot L_3)^2}{\sqrt{L_1^2 + L_3^2} \cdot \sqrt{(L_1 \cdot L_2)^2 + (L_1 \cdot L_3)^2 + (L_2 \cdot L_3)^2}}. \quad (9 / 2)$$

Ugyanígy:

$$r = c_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{L_1^2}{c} \cdot \operatorname{tg}(90^\circ - \beta) = \frac{L_1^2}{c} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \beta} = \frac{L_1^2}{c} \cdot \frac{\cos \beta}{\sin \beta} = \frac{L_1^2}{c} \cdot \frac{\cos \beta}{\sqrt{1 - \sin^2 \beta}}; \text{ folytatva:}$$

$$\begin{aligned}
r &= \frac{L_1^2}{c} \cdot \frac{\frac{L_2^2}{a \cdot c}}{\sqrt{1 - \left(\frac{L_2^2}{a \cdot c}\right)^2}} = \frac{L_1^2}{c} \cdot \frac{L_2^2}{\sqrt{(a \cdot c)^2 - L_2^4}} = \frac{(L_1 \cdot L_2)^2}{\sqrt{L_1^2 + L_2^2} \cdot \sqrt{(L_2^2 + L_3^2) \cdot (L_1^2 + L_2^2) - L_2^4}} = \\
&= \frac{(L_1 \cdot L_2)^2}{\sqrt{L_1^2 + L_2^2} \cdot \sqrt{(L_1 \cdot L_2)^2 + (L_1 \cdot L_3)^2 + L_2^4 + (L_2 \cdot L_3)^2 - L_2^4}} = \frac{(L_1 \cdot L_2)^2}{\sqrt{L_1^2 + L_2^2} \cdot \sqrt{(L_1 \cdot L_2)^2 + (L_1 \cdot L_3)^2 + (L_2 \cdot L_3)^2}}, \text{ tehát:}
\end{aligned}$$

$$r = \frac{(L_1 \cdot L_2)^2}{\sqrt{L_1^2 + L_2^2} \cdot \sqrt{(L_1 \cdot L_2)^2 + (L_1 \cdot L_3)^2 + (L_2 \cdot L_3)^2}}. \quad (9 / 3)$$

Ezután meghatározzuk az alapháromszög oldalaihoz tartozó magasságokat.

A 4. ábra és a fenti képletek alapján:

$$\begin{aligned} m_a &= \overline{AT_a} = \sqrt{c^2 - a_1^2} = \sqrt{L_1^2 + L_2^2 - \frac{L_2^4}{L_2^2 + L_3^2}} = \sqrt{\frac{(L_1^2 + L_2^2) \cdot (L_2^2 + L_3^2) - L_2^4}{L_2^2 + L_3^2}} = \\ &= \sqrt{\frac{(L_1 \cdot L_2)^2 + (L_1 \cdot L_3)^2 + L_2^4 + (L_2 \cdot L_3)^2 - L_2^4}{L_2^2 + L_3^2}} = \sqrt{\frac{(L_1 \cdot L_2)^2 + (L_1 \cdot L_3)^2 + (L_2 \cdot L_3)^2}{L_2^2 + L_3^2}}, \text{ tehát:} \end{aligned}$$

$$m_a = \sqrt{\frac{(L_1 \cdot L_2)^2 + (L_1 \cdot L_3)^2 + (L_2 \cdot L_3)^2}{L_2^2 + L_3^2}}. \quad (10 / 1)$$

Hasonlóképpen:

$$\begin{aligned} m_b &= \overline{BT_b} = \sqrt{a^2 - b_1^2} = \sqrt{L_2^2 + L_3^2 - \frac{L_3^4}{L_3^2 + L_1^2}} = \sqrt{\frac{(L_2^2 + L_3^2) \cdot (L_1^2 + L_3^2) - L_3^4}{L_1^2 + L_3^2}} = \\ &= \sqrt{\frac{(L_1 \cdot L_2)^2 + (L_1 \cdot L_3)^2 + (L_2 \cdot L_3)^2 + L_3^4 - L_3^4}{L_1^2 + L_3^2}} = \sqrt{\frac{(L_1 \cdot L_2)^2 + (L_1 \cdot L_3)^2 + (L_2 \cdot L_3)^2}{L_1^2 + L_3^2}}, \text{ tehát:} \end{aligned}$$

$$m_b = \sqrt{\frac{(L_1 \cdot L_2)^2 + (L_1 \cdot L_3)^2 + (L_2 \cdot L_3)^2}{L_1^2 + L_3^2}}. \quad (10 / 2)$$

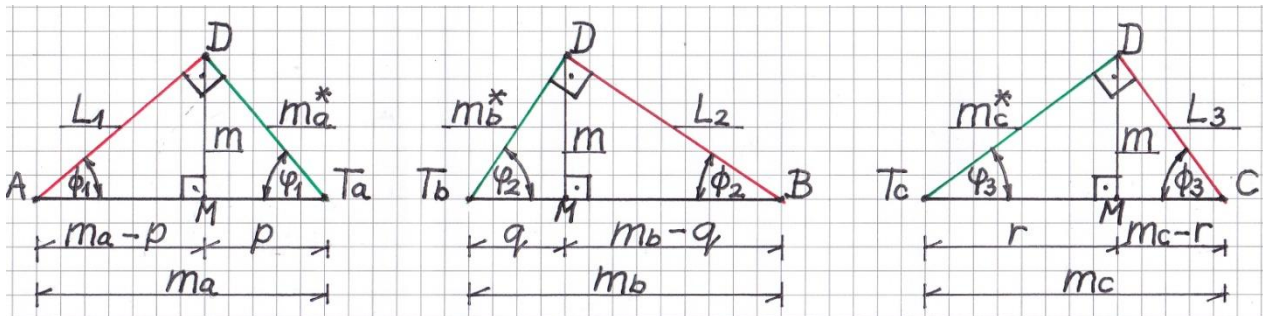
Ugyanígy:

$$\begin{aligned} m_c &= \overline{CT_c} = \sqrt{b^2 - c_1^2} = \sqrt{L_3^2 + L_1^2 - \frac{L_1^4}{L_1^2 + L_2^2}} = \sqrt{\frac{(L_1^2 + L_3^2) \cdot (L_1^2 + L_2^2) - L_1^4}{L_1^2 + L_2^2}} = \\ &= \sqrt{\frac{L_1^4 + (L_1 \cdot L_3)^2 + (L_1 \cdot L_2)^2 + (L_2 \cdot L_3)^2 - L_1^4}{L_1^2 + L_2^2}} = \sqrt{\frac{(L_1 \cdot L_2)^2 + (L_1 \cdot L_3)^2 + (L_2 \cdot L_3)^2}{L_1^2 + L_2^2}}, \text{ tehát:} \end{aligned}$$

$$m_c = \sqrt{\frac{(L_1 \cdot L_2)^2 + (L_1 \cdot L_3)^2 + (L_2 \cdot L_3)^2}{L_1^2 + L_2^2}}. \quad (10 / 3)$$

III. Az **ABCD** tetraéder oldallap - háromszögei ismeretlen adatainak meghatározása

Először az oldallap - háromszögek magasságát határozzuk meg – 5. ábra.



5. ábra

Pitagorász - tétellel és az előző eredményekkel:

$$(m_a^*)^2 = m_a^2 - L_1^2 = \frac{(L_1 \cdot L_2)^2 + (L_1 \cdot L_3)^2 + (L_2 \cdot L_3)^2}{L_2^2 + L_3^2} - L_1^2 =$$

$$= \frac{(L_1 \cdot L_2)^2 + (L_1 \cdot L_3)^2 + (L_2 \cdot L_3)^2 - L_1^2 \cdot (L_2^2 + L_3^2)}{L_2^2 + L_3^2} = \frac{(L_1 \cdot L_2)^2 + (L_1 \cdot L_3)^2 + (L_2 \cdot L_3)^2 - (L_1 \cdot L_2)^2 - (L_1 \cdot L_3)^2}{L_2^2 + L_3^2} = \frac{(L_2 \cdot L_3)^2}{L_2^2 + L_3^2},$$

innen:

$$m_a^* = \frac{L_2 \cdot L_3}{\sqrt{L_2^2 + L_3^2}}. \quad (11 / 1)$$

Hasonlóképpen:

$$(m_b^*)^2 = m_b^2 - L_2^2 = \frac{(L_1 \cdot L_2)^2 + (L_1 \cdot L_3)^2 + (L_2 \cdot L_3)^2}{L_1^2 + L_3^2} - L_2^2 =$$

$$= \frac{(L_1 \cdot L_2)^2 + (L_1 \cdot L_3)^2 + (L_2 \cdot L_3)^2 - L_2^2 \cdot (L_1^2 + L_3^2)}{L_1^2 + L_3^2} = \frac{(L_1 \cdot L_2)^2 + (L_1 \cdot L_3)^2 + (L_2 \cdot L_3)^2 - (L_1 \cdot L_2)^2 - (L_2 \cdot L_3)^2}{L_1^2 + L_3^2} = \frac{(L_1 \cdot L_3)^2}{L_1^2 + L_3^2},$$

innen:

$$m_b^* = \frac{L_1 \cdot L_3}{\sqrt{L_1^2 + L_3^2}}. \quad (11 / 2)$$

Ugyanígy:

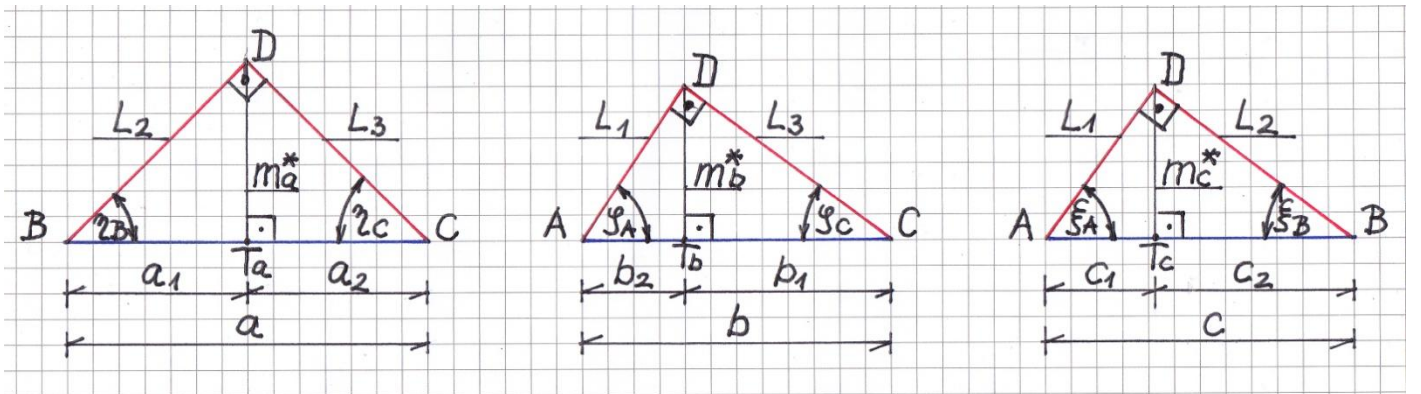
$$(m_c^*)^2 = m_c^2 - L_3^2 = \frac{(L_1 \cdot L_2)^2 + (L_1 \cdot L_3)^2 + (L_2 \cdot L_3)^2}{L_1^2 + L_2^2} - L_3^2 =$$

$$= \frac{(L_1 \cdot L_2)^2 + (L_1 \cdot L_3)^2 + (L_2 \cdot L_3)^2 - L_3^2 \cdot (L_1^2 + L_2^2)}{L_1^2 + L_2^2} = \frac{(L_1 \cdot L_2)^2 + (L_1 \cdot L_3)^2 + (L_2 \cdot L_3)^2 - (L_1 \cdot L_3)^2 - (L_2 \cdot L_3)^2}{L_1^2 + L_2^2} = \frac{(L_1 \cdot L_2)^2}{L_1^2 + L_2^2},$$

innen:

$$m_c^* = \frac{L_1 \cdot L_2}{\sqrt{L_1^2 + L_2^2}}. \quad (11 / 3)$$

Másodszor az oldallap - háromszögek belső szögeit számítjuk ki – 6. ábra.



6. ábra

Eszerint:

$$\operatorname{tg} \eta_B = \frac{L_3}{L_2} \rightarrow \eta_B = \operatorname{arctg} \frac{L_3}{L_2}, \quad (12 / 1)$$

$$\eta_C = 90^\circ - \eta_B. \quad (12 / 2)$$

Hasonlóan:

$$\operatorname{tg} \zeta_A = \frac{L_3}{L_1} \rightarrow \zeta_A = \operatorname{arctg} \frac{L_3}{L_1}, \quad (13 / 1)$$

$$\zeta_C = 90^\circ - \zeta_A. \quad (13 / 2)$$

Ugyanígy:

$$\operatorname{tg} \xi_A = \frac{L_2}{L_1} \rightarrow \xi_A = \operatorname{arctg} \frac{L_2}{L_1}, \quad (14 / 1)$$

$$\xi_B = 90^\circ - \xi_A. \quad (14 / 2)$$

IV. A tetraéder magasságának, valamint lapjai és élei hajlásszögének számítása

Először a tetraéder magasságát határozzuk meg. Az 5. ábra alapján – például – :

$$\begin{aligned} m^2 &= (m_a^*)^2 - p^2 = \frac{(L_2 \cdot L_3)^2}{L_2^2 + L_3^2} - \frac{(L_2 \cdot L_3)^2 \cdot (L_2 \cdot L_3)^2}{(L_2^2 + L_3^2) \cdot [(L_1 \cdot L_2)^2 + (L_1 \cdot L_3)^2 + (L_2 \cdot L_3)^2]} = \\ &= \frac{(L_2 \cdot L_3)^2}{L_2^2 + L_3^2} \cdot \left[1 - \frac{(L_2 \cdot L_3)^2}{(L_1 \cdot L_2)^2 + (L_1 \cdot L_3)^2 + (L_2 \cdot L_3)^2} \right] = \frac{(L_2 \cdot L_3)^2}{L_2^2 + L_3^2} \cdot \frac{(L_1 \cdot L_2)^2 + (L_1 \cdot L_3)^2 + (L_2 \cdot L_3)^2 - (L_2 \cdot L_3)^2}{(L_1 \cdot L_2)^2 + (L_1 \cdot L_3)^2 + (L_2 \cdot L_3)^2} = \\ &= \frac{(L_2 \cdot L_3)^2}{L_2^2 + L_3^2} \cdot \frac{(L_1 \cdot L_2)^2 + (L_1 \cdot L_3)^2}{(L_1 \cdot L_2)^2 + (L_1 \cdot L_3)^2 + (L_2 \cdot L_3)^2} = \frac{(L_2 \cdot L_3)^2}{L_2^2 + L_3^2} \cdot \frac{L_1^2 \cdot (L_2^2 + L_3^2)}{(L_1 \cdot L_2)^2 + (L_1 \cdot L_3)^2 + (L_2 \cdot L_3)^2} = \\ &= \frac{(L_1 \cdot L_2 \cdot L_3)^2}{(L_1 \cdot L_2)^2 + (L_1 \cdot L_3)^2 + (L_2 \cdot L_3)^2}, \text{ azaz} \end{aligned}$$

$$m^2 = \frac{(L_1 \cdot L_2 \cdot L_3)^2}{(L_1 \cdot L_2)^2 + (L_1 \cdot L_3)^2 + (L_2 \cdot L_3)^2}, \text{ innen:}$$

$$m = \frac{L_1 \cdot L_2 \cdot L_3}{\sqrt{(L_1 \cdot L_2)^2 + (L_1 \cdot L_3)^2 + (L_2 \cdot L_3)^2}}. \quad (15)$$

Másodszor a vízszintes síkhoz viszonyított hajlásszögeket számítjuk ki. Az 5. ábra szerint:

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{m}{p} = \frac{\frac{L_1 \cdot L_2 \cdot L_3}{\sqrt{(L_1 \cdot L_2)^2 + (L_1 \cdot L_3)^2 + (L_2 \cdot L_3)^2}}}{\frac{(L_2 \cdot L_3)^2}{\sqrt{L_2^2 + L_3^2} \cdot \sqrt{(L_1 \cdot L_2)^2 + (L_1 \cdot L_3)^2 + (L_2 \cdot L_3)^2}}} = \frac{L_1 \cdot L_2 \cdot L_3}{(L_2 \cdot L_3)^2} \cdot \sqrt{L_2^2 + L_3^2} = \frac{L_1}{L_2 \cdot L_3} \cdot \sqrt{L_2^2 + L_3^2}, \text{ azaz}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = L_1 \cdot \frac{\sqrt{L_2^2 + L_3^2}}{L_2 \cdot L_3} \rightarrow \varphi_1 = \operatorname{arctg} \left(L_1 \cdot \frac{\sqrt{L_2^2 + L_3^2}}{L_2 \cdot L_3} \right). \quad (16 / 1)$$

Majd ismét az 5. ábra szerint:

$$\phi_1 = 90^\circ - \varphi_1 . \quad (16 / 2)$$

Hasonlóképpen:

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{m}{q} = \frac{\frac{L_1 \cdot L_2 \cdot L_3}{\sqrt{(L_1 \cdot L_2)^2 + (L_1 \cdot L_3)^2 + (L_2 \cdot L_3)^2}}}{\frac{(L_1 \cdot L_3)^2}{\sqrt{L_1^2 + L_3^2} \cdot \sqrt{(L_1 \cdot L_2)^2 + (L_1 \cdot L_3)^2 + (L_2 \cdot L_3)^2}}} = \frac{L_1 \cdot L_2 \cdot L_3}{(L_1 \cdot L_3)^2} \cdot \sqrt{L_1^2 + L_3^2} = \frac{L_2}{L_1 \cdot L_3} \cdot \sqrt{L_1^2 + L_3^2} , \text{ azaz}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = L_2 \cdot \frac{\sqrt{L_1^2 + L_3^2}}{L_1 \cdot L_3} \rightarrow \varphi_2 = \arctg \left(L_2 \cdot \frac{\sqrt{L_1^2 + L_3^2}}{L_1 \cdot L_3} \right) . \quad (17 / 1)$$

Majd

$$\phi_2 = 90^\circ - \varphi_2 . \quad (17 / 2)$$

Ugyanígy:

$$\operatorname{tg} \varphi_3 = \frac{m}{r} = \frac{\frac{L_1 \cdot L_2 \cdot L_3}{\sqrt{(L_1 \cdot L_2)^2 + (L_1 \cdot L_3)^2 + (L_2 \cdot L_3)^2}}}{\frac{(L_1 \cdot L_2)^2}{\sqrt{L_1^2 + L_2^2} \cdot \sqrt{(L_1 \cdot L_2)^2 + (L_1 \cdot L_3)^2 + (L_2 \cdot L_3)^2}}} = \frac{L_1 \cdot L_2 \cdot L_3}{(L_1 \cdot L_2)^2} \cdot \sqrt{L_1^2 + L_2^2} = \frac{L_3}{L_1 \cdot L_2} \cdot \sqrt{L_1^2 + L_2^2} , \text{ azaz}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_3 = L_3 \cdot \frac{\sqrt{L_1^2 + L_2^2}}{L_1 \cdot L_2} \rightarrow \varphi_3 = \arctg \left(L_3 \cdot \frac{\sqrt{L_1^2 + L_2^2}}{L_1 \cdot L_2} \right) . \quad (18 / 1)$$

Majd:

$$\phi_3 = 90^\circ - \varphi_3 . \quad (18 / 2)$$

Figyelemre méltó a (16), (17), (18) képletek szimmetrikus felépítése.

Ezzel a közvetlen feladat megoldását befejeztük.

V. Egy speciális eset

Legyen:

$$L_1 = L_2 = L_3 = L ; \quad (*)$$

ekkor a levezetett képleteinkkel és (*) - gal a következő eredményeket kapjuk:

$$a = b = c = \sqrt{2 \cdot L^2} = \sqrt{2} \cdot L = 1,414213562 \cdot L ; \quad (S1)$$

$$\alpha = \beta = \gamma = \arccos \left(\frac{L^2}{\sqrt{2 \cdot L^2} \cdot \sqrt{2 \cdot L^2}} \right) = \arccos \frac{1}{2} = 60^\circ ; \quad (S2)$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = \gamma_1 = \gamma_2 = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ ; \quad (\text{S3})$$

$$a_1 = b_1 = c_1 = a_2 = b_2 = c_2 = \frac{L^2}{\sqrt{2} \cdot L^2} = \frac{L}{\sqrt{2}} = 0,7071067812 \cdot L ; \quad (\text{S4})$$

$$p = q = r = \frac{(L^2)^2}{\sqrt{2} \cdot L^2 \cdot \sqrt{3 \cdot (L^2)^2}} = \frac{L^4}{\sqrt{2} \cdot L \cdot \sqrt{3} \cdot L^2} = \frac{L}{\sqrt{6}} = 0,4082482905 \cdot L ; \quad (\text{S5})$$

$$m_a = m_b = m_c = \sqrt{\frac{3 \cdot (L^2)^2}{2 \cdot L^2}} = \sqrt{\frac{3 \cdot L^4}{2 \cdot L^2}} = \sqrt{\frac{3 \cdot L^2}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot L = 1,224744871 \cdot L ; \quad (\text{S6})$$

$$m_a^* = m_b^* = m_c^* = \frac{L^2}{\sqrt{2} \cdot L^2} = \frac{L}{\sqrt{2}} = 0,7071067812 \cdot L ; \quad (\text{S7})$$

$$\xi_A = \eta_B = \zeta_A = \arctg \frac{L}{L} = \arctg 1 = 45^\circ ; \quad (\text{S8})$$

$$\xi_B = \eta_C = \zeta_C = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ ; \quad (\text{S9})$$

$$m = \frac{L^3}{\sqrt{3 \cdot (L^2)^2}} = \frac{L^3}{\sqrt{3} \cdot L^2} = \frac{L}{\sqrt{3}} = 0,5773502692 \cdot L ; \quad (\text{S10})$$

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \arctg \left(L \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot L^2}{L^2} \right) = \arctg \left(L \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot L}{L^2} \right) = \arctg \sqrt{2} = 54,73561032^\circ ; \quad (\text{S11})$$

$$\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = 90^\circ - 54,73561032^\circ = 35,26438968^\circ . \quad (\text{S12})$$

Megjegyzések:

M1. Képezzük a (15) kifejezés négyzetének reciprokát! Ekkor:

$$\frac{1}{m^2} = \frac{(L_1 \cdot L_2)^2 + (L_1 \cdot L_3)^2 + (L_2 \cdot L_3)^2}{L_1^2 \cdot L_2^2 \cdot L_3^2} = \frac{1}{L_3^2} + \frac{1}{L_2^2} + \frac{1}{L_1^2} , \text{ tehát:}$$

$$\boxed{\frac{1}{m^2} = \frac{1}{L_1^2} + \frac{1}{L_2^2} + \frac{1}{L_3^2} .} \quad (\text{19})$$

A (19) képlet egy nevezetes összefüggés – v.ö.: [2].

M2. Ezután képezzük a (11) képletek négyzetei reciprokát! Ekkor:

$$\frac{1}{(m_a^*)^2} = \frac{L_2^2 + L_3^2}{L_2^2 \cdot L_3^2} = \frac{1}{L_3^2} + \frac{1}{L_2^2} ; \quad (\text{20 / 1})$$

$$\frac{1}{(m_b^*)^2} = \frac{L_1^2 + L_3^2}{L_1^2 \cdot L_3^2} = \frac{1}{L_3^2} + \frac{1}{L_1^2} ; \quad (\text{20 / 2})$$

$$\frac{1}{(m_c^*)^2} = \frac{L_1^2 + L_2^2}{L_1^2 \cdot L_2^2} = \frac{1}{L_2^2} + \frac{1}{L_1^2} . \quad (\text{20 / 3})$$

Most adjuk össze a (20) képleteket! Ekkor:

$$\frac{1}{(m_a^*)^2} + \frac{1}{(m_b^*)^2} + \frac{1}{(m_c^*)^2} = \frac{1}{L_3^2} + \frac{1}{L_2^2} + \frac{1}{L_3^2} + \frac{1}{L_1^2} + \frac{1}{L_2^2} + \frac{1}{L_1^2} = 2 \cdot \left(\frac{1}{L_1^2} + \frac{1}{L_2^2} + \frac{1}{L_3^2} \right) ; \quad (\text{21 / 1})$$

majd (19) és (21 / 1) összevetéséből:

$$\frac{1}{(m_a^*)^2} + \frac{1}{(m_b^*)^2} + \frac{1}{(m_c^*)^2} = \frac{2}{m^2} . \quad (21 / 2)$$

M3. További érdekes szög - összefüggések írhatók fel a tetraéder alapháromszöge csúcsaiba befutó élek szögei között. A (4 / 1), (5 / 1), (6 / 1) képletekkel az **A** csúcsra:

$$\cos \alpha = \frac{L_1^2}{b \cdot c} = \frac{L_1}{b} \cdot \frac{L_1}{c} ; \quad (22 / 1)$$

ámde a 6. ábra szerint:

$$\frac{L_1}{b} = \cos \zeta_A , \quad (22 / 2)$$

és

$$\frac{L_1}{c} = \cos \xi_A , \quad (22 / 3)$$

így a (22 / 1), (22 / 2), (22 / 3) képletek szerint:

$$\cos \alpha = \cos \zeta_A \cdot \cos \xi_A . \quad (22 / 4)$$

Hasonló összefüggések írhatók fel a **B** és **C** csúcsra is. Ezek, valamint a (21 / 2) és a (22 / 4) képletek V. szerinti specializációjának elvégzését az Olvasóra bízunk.

M4. Valójában az eredeti feladatot is megoldottuk, hiszen a régi és az új jelölésekkel:

$$x_P = c_1 , \quad y_P = r , \quad z_P = m . \quad (23)$$

Források:

[1] – [https://www.w-hs.de/fileadmin/public/dokumente/erkunden/fachbereiche/FB1-Maschinenbau_Facility/Mitarbeiter/Prof. Dr.-Ing. Dirk Fr%C3%B6hling/Allgemeine_Beispiele_v1.0.pdf](https://www.w-hs.de/fileadmin/public/dokumente/erkunden/fachbereiche/FB1-Maschinenbau_Facility/Mitarbeiter/Prof._Dr.-Ing._Dirk_Fr%C3%B6hling/Allgemeine_Beispiele_v1.0.pdf)

[2] – **Fitos László**: Analóg tételek és feladatok a sík - és térgeometriában
Középiskolai szakköri füzetek
Tankönyvkiadó, Budapest, 1984.

Összeállította: **Galgóczi Gyula**
mérnöktanár

Sződliget, 2014. 08. 30.